NO DATE 30/05/17

(Συνέχεια άσκ. 6)

γ) $f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt.$

$$f'(x) = \cos(x^2)$$
$$f''(x) = -2x\sin(x^2)$$
$$f'''(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$$
$$f^{(4)}(x) = -4x\cos(x^2) - 8x\cos(x^2) + 8x^3\sin(x^2)$$
$$f^{(5)}(x) = -4\cos(x^2) + 8x^2\sin(x^2) - 8\cos(x^2) + 16x^2\sin(x^2) + 24x^2\sin(x^2) + 16x^4\cos(x^2)$$

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(0) = 1$$

$$T_{5,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= x + \frac{-12}{120}x^5 = x - \frac{1}{10}x^5.$$

NO DATE

Άσκηση 7)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, g_1, g_2 παραγωγίσιμες.

Ορισμός: $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt =$

$$= \int_0^{g_2(x)} f(t)\,dt - \int_0^{g_1(x)} f(t)\,dt$$

$= (F \circ g_2)(x) - (F \circ g_1)(x)$, όπου $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Εφόσον f συνεχής από 1ο θεώρημα του Απειρ. Λογ. $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς: $\phi'(x) = F'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - F'(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$

$= f(g_2(x))\, g_2'(x) - f(g_1(x))\, g_1'(x)$

Άσκηση 8)

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} e^t \sin t\,dt}{x^4}$

Θέτοντας $f(x) = \int_0^{x^2} e^t \sin t\,dt$

$g(x) = x^4$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} g(x)$

NO DATE

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^{x^2}\sin(x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\frac{e^{x^2}}{2}\cdot\frac{\sin(x^2)}{x^2}\xrightarrow{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Άρα από Θ. DLH $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}e^t\sin t\,dt}{x^4}=\frac{1}{2}$.

Άσκηση 2)

$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής

Ορίζουμε $F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$.

Λύση

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα. Θέτουμε $y=\frac{x}{t}$

Για $t=1 \rightsquigarrow y=x$

Για $t=x \rightsquigarrow y=1$

$t=\frac{x}{y}\to dt=-\frac{x}{y^2}dy$

Συνεπώς $F(x)=\int_x^1 f(y)\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy$

$=x\cdot\int_1^x\frac{f(y)}{y^2}dy$

DATE

NO

Άρα $f'(x) = 1 \cdot \int_1^x \frac{f(y)}{y^2} dy + x \frac{f(x)}{x^2}$

$= \int_1^x \frac{f(y)}{y^2} dy + \frac{f(x)}{x}.$

Άσκηση 10)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής. ΝΔΟ: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$$

Θέτουμε $F(x) \overset{\text{Λύση}}{=} \int_0^x f(u)(x-u)\,du =$

$= \int_0^x x \cdot f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du.$

και $G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$

$= x \cdot \int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du$

Άρα F παραγωγίσιμη.

$F'(x) = 1 \cdot \int_0^x f(u)\,du + x f(x) - x \cdot f(x)$

$= \int_0^x f(u)\,du.$

NO DATE

Θέτουμε $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ η g είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής.

Άρα η G είναι παραγωγίσιμη με $G'(x)=g(x)$
(1ο θεωρ. Απ. Λογ.)

Άρα $G'(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Έτσι $(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Άρα η $F-G$ είναι σταθερή. Επίσης
$$(F-G)(0)=F(0)-G(0)=0-0=0$$
Άρα $F(x)-G(x)=0, \forall x$.
$$\Rightarrow F(x)=G(x)$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

<u>Παραδ</u>: Υπολογισμός του $\sin(2)$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}. ("υπόλοιπο")

$$\sin 2 = T_{2n+1}(2) + R_{2n+1,f,0}(2)$$
Είχαμε δει ότι $|R_{2n+1,f,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Αναζητάμε n: $\frac{2^{n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}$

Για $n=5$ αυτό συμβαίνει:
$$\frac{2^{12}}{12!}=\frac{4096}{479001600}<10^{-4}$$

Αρα για $n=5$

$$\sin(2) = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R, \text{ με } |R| < 10^{-5}$$

(**) Το παρακάτω παράδειγμα εντελώς πληροφοριακά.

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\,dx$$

$$y = \frac{\pi}{4} - x \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{4} - y$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right)(-dy)$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{\tan(\frac{\pi}{4}) - \tan y}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan y}\right) dy$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y}\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1 + \tan y}\right) dy$$

(πράξεις)

$= \dots\dots$

- $I = \int P(\cos x, \sin x)\, dx$

όπου $P(u,v)$ είναι ρητή συνάρτηση
δύο μεταβλητών

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\sin(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

Άρα $\quad I = \int P\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\, dy.$

ανάγεται σε ολ/λα ρητής.

NO DATE

<u>Άσκηση</u>: Να εξετάσετε για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι αν $a_k \not\to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει.

Θέτουμε $a_k = \frac{1}{1+x^k}$.

α) Αν $|x|<1$ (δηλαδή: $-1<x<1$)
τότε $x^k \to 0$
άρα $a_k = \frac{1}{1+x^2} \to 1$.
Συνεπώς η σειρά αποκλίνει.
β) Αν $x=1$, τότε $a_k = \frac{1}{2}$, $\forall k$ άρα $a_k \not\to 0$
η σειρά αποκλίνει.

γ) Αν $x=-1$, για περιττά k ο παρονομαστής μηδενίζεται άρα η σειρά δεν ορίζεται

δ) $|x|>1$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{1+x^{k+1}}}{\frac{1}{1+x^k}} = \frac{1+x^k}{1+x^{k+1}} = \frac{\frac{1}{x^k}+1}{\frac{1}{x^k}+x} \to \frac{1}{x}.$$

Άρα από κριτήριο λόγου η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.